prodotto scalare e ortogonalità.

1) "righe" di una matrice

2) forme bilineari (simmetriche) → geometria delle coniche.

3) nozione di distanza euclidea + angolo se $\mathbb{K}$-vettoriale su $\mathbb{R}$.



Sia $V = V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$

Def: Una funzione $\beta: V \times V \to \mathbb{K}$ è detta forma bilineare se

1) $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$: $\beta(a\bar{u} + b\bar{v}, \bar{w}) = a\beta(\bar{u}, \bar{w}) + b\beta(\bar{v}, \bar{w})$

2) $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$: $\beta(\bar{u}, a\bar{v} + b\bar{w}) = a\beta(\bar{u}, \bar{v}) + b\beta(\bar{u}, \bar{w})$.

oss: Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ ⇒ in generale una base di $V_n(\mathbb{K})$

$\bar{u} = \sum \alpha_i \bar{e}_i$
$\bar{v} = \sum \gamma_j \bar{e}_j$

$$\beta(\bar{u}, \bar{v}) = \beta\left(\sum \alpha_i \bar{e}_i, \sum \gamma_j \bar{e}_j\right) =$$

$$= \sum_i \alpha_i \, \beta\left(e_i, \sum \gamma_j e_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \gamma_j \, \beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j) =$$

$$= [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n] \, B \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

ove $B = \left(\left(\beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \right) \right)_{i,j=1}^{n}$

$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$(\bar{a}, \bar{b}) \to {}^t\bar{a} B \bar{b}$

B è detta matrice della forma bilineare.

Es: $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$

$((a,b),(c,d)) \to \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ è bilineare.

$$B = \begin{bmatrix} \det(\bar{e}_1,\bar{e}_1) & \det(\bar{e}_1,\bar{e}_2) \\ \det(\bar{e}_2,\bar{e}_1) & \det(\bar{e}_2,\bar{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es. 2. $\beta: \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$

$((a,b),(c,d)) \to ac + bd.$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oss: l'insieme di tutte le forme bilineari su $V(\mathbb{K})$ con l'op. di somma di funzioni è spazio vettoriale su V di dimensione $(\dim V)^2$ ed isomorfo a quello delle matrici quadrate su $\mathbb{K}$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$B : \begin{array}{l} \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K} \\ (\bar{a}, \bar{b}) \longrightarrow {}^t\bar{a} B \bar{b} \end{array}$$ è bilineare.

(verifica: proprietà distributiva prod. matrici).

$$(\alpha\bar{a}+\beta\bar{c})^{T} B\bar{d} =$$

$$= \alpha\bar{a}^{T} B\bar{d} + \beta\bar{c}^{T} B\bar{d}$$

$$\bar{a}^{T} B(\alpha\bar{c}+\beta\bar{d}) =$$

$$\bar{a}^{T}[B\alpha\bar{c} + B\beta\bar{d}] =$$

$$= \bar{a}^{T}[\alpha B\bar{c} + \beta B\bar{d}] = \alpha(\bar{a}^{T} B\bar{c}) + \beta\bar{a}^{T} B\bar{d}$$

Una forma bilineare

$$\beta : V \times V \to \mathbb{K}$$

$\bar{u}$ e $\bar{v}$ commutano!

è detta

- **SIMMETRICA** se $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{K} : \beta(\bar{u}, \bar{v}) = \beta(\bar{v}, \bar{u})$
- **ANTISIMMETRICA** se $\forall \bar{u}\, \bar{v} \in \mathbb{K} : \beta(\bar{u}, \bar{v}) = -\beta(\bar{v}, \bar{u})$.
- **ALTERNANTE** se $\forall \bar{u} \in \mathbb{K} : \beta(\bar{u}, \bar{u}) = 0$

N.B. Se ALTERNANTE $\Rightarrow$ ANTISIMMETRICA (sempre).

Se ANTISIMMETRICA & $-1 \neq 1 \Rightarrow$ ALTERNANTE.

(in $\mathbb{Z}_2$: $1 = -1$).

β ALTERNANTE

$$\beta(\bar{u}, \bar{v}) = \beta(\bar{u}, \bar{v}) + \beta(\bar{v}, \bar{v}) = \beta(\bar{u} + \bar{v}, \bar{v}) =$$

$\beta(\bar{v}, \bar{v}) = 0$

$$= \beta(\bar{u}+\bar{v},\bar{v}) + \beta(\bar{u}+\bar{v},\bar{u}+\bar{v}) =$$

$$= \beta(\bar{u}+\bar{v},\bar{u}+2\bar{v}) - \beta(\bar{u}+2\bar{v},\bar{u}+2\bar{v}) =$$

$$= \beta(-\bar{v},\bar{u}+2\bar{v}) =$$

$$= -\beta(\bar{v},\bar{u}+2\bar{v}) + \beta(\bar{v},\bar{v}) =$$

$$= -\beta(\bar{v},\bar{u}+\bar{v}) + \beta(\bar{v},\bar{v}) =$$

$$= -\beta(\bar{v},\bar{u}).$$

Se $\beta(\bar{u},\bar{v}) = -\beta(\bar{v},\bar{u}) \Rightarrow \beta(\bar{u},\bar{u}) = -\beta(\bar{u},\bar{u})$

se $1 \neq -1 \Rightarrow \beta(\bar{u},\bar{u}) = 0$ ∎

Def: Una forma bilineare simmetrica su $V(\mathbb{K})$ è detta **prodotto scalare**.

(N.B: prodotto scalare ≠ prodotto per scalare).

prodotto per scalare.

$$\mathbb{K} \times V \to V$$
$$(a, \bar{v}) \to a\bar{v}$$

] def di s. vett.

prodotto scalare

$$V \times V \to \mathbb{K}$$
$$(\bar{v}, \bar{w}) \to \beta(\bar{v}, \bar{w})$$

] forma bilineare simmetrica.

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale, $\bar{v}, \bar{w} \in V(\mathbb{K})$ e $\beta: V \times V \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare.

- Due vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono detti ortogonali (rispetto a β) se $\beta(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ in questo caso si scrive $\boxed{\bar{u} \perp \bar{v}}$ o $\boxed{\bar{u} \perp_\beta \bar{v}}$

- Un vettore $\bar{u}$ è detto isotropo se

$$\bar{u} \perp \bar{u}$$

e $\bar{u} \neq 0$

- Se $X \subseteq V$, poniamo

$$X^{\perp} := \{ \bar{y} \in V : \forall \bar{x} \in X : \bar{x} \perp \bar{y} \}.$$

- Il radicale di β è l'insieme

$$\mathrm{Rad}(\beta) := V^{\perp}$$

oss: $\mathrm{Rad}(\beta)$ è sottospazio di V.

- β è detto non degenere se $\mathrm{Rad}(\beta) = \{0\}$.

- Se β è un prodotto scalare, si dice

forma quadratica associata a β

la funzione

$$q : V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$
$$\bar{v} \to \beta(\bar{v}, \bar{v}).$$

oss:
$$q(a\bar{v}) = \beta(a\bar{v}, a\bar{v}) = a^2 \beta(\bar{v}, \bar{v}) = a^2 q(\bar{v}).$$

$$q(\bar{u}+\bar{v}) = \beta(\bar{u}+\bar{v}, \bar{u}+\bar{v}) =$$
$$= \beta(\bar{u}, \bar{u}) + \beta(\bar{u}, \bar{v}) + \beta(\bar{v}, \bar{u}) + \beta(\bar{v}, \bar{v})$$
$$= q(\bar{u}) + 2\beta(\bar{u}, \bar{v}) + q(\bar{v})$$

1) Una forma quadratica non è lineare

2) Se $1 \neq -1$ cioè $2 \neq 0 \Rightarrow$ DATA q si può trovare a β.

$$\beta(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{i}\left(q(\bar{u}+\bar{v}) - q(\bar{u}) - q(\bar{v})\right)$$

è bilineare e simmetrica.

- Se ~~$\mathbb{K}=\mathbb{R}$~~ un prodotto scalare è detto <u>definito</u> se

$$\forall \bar{v} \in V : \bar{v} \neq \underline{0} \Rightarrow q(\bar{v}) \neq 0$$

cioè $\beta(\bar{v},\bar{v}) \neq 0$

~~Caratterizzazione~~

- Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ un prod. scalare è <u>definito</u> <u>positivo</u> (negativo) se

(positivo) $\forall \bar{v} \in V : \beta(\bar{v},\bar{v}) \geq 0$ e $\beta(\bar{v},\bar{v}) = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$

(negativo) $\forall \bar{v} \in V : \beta(\bar{v},\bar{v}) \leq 0$ e $\beta(\bar{v},\bar{v}) = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$

Un prodotto scalare su $V(\mathbb{R})$ definito positivo è detto prodotto scalare Euclideo.

Def: Sia $V_n(\mathbb{R})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{R}$.

Si dice norma una funzione

$\|\bar{v}\|$ $\qquad$ $\|\cdot\| : V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$\bar{v} \to \|\bar{v}\|$

tale che

1) $\|\bar{v}\| \geq 0 \quad \forall \bar{v} \in V$
2) $\|\bar{v}\| = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$
3) $\|\alpha \bar{v}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$
4) $\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$

"lunghezza di un vettore"

Se $\cdot : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare euclideo $\Rightarrow$

$$\|\bar{v}\| := \sqrt{\bar{v}\cdot\bar{v}}$$

è una norma.

1) $\|\bar{v}\| \geq 0 \quad \forall \bar{v} \in V$ ism.

2) $\bar{v}\cdot\bar{v} > 0 \quad \forall \bar{v} \neq \underline{0} \Rightarrow \|\bar{v}\| \neq 0 \Leftrightarrow \bar{v} \neq \underline{0}$

3) $\|\alpha\bar{v}\| = \sqrt{\alpha\bar{v}\cdot\alpha\bar{v}} = \sqrt{\alpha^2\bar{v}\cdot\bar{v}} = \sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{\bar{v}\cdot\bar{v}} =$

$$= |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|.$$

La disuguaglianza triangolare è più difficile da dimostrare. $\rightarrow$ 2 passaggi.

1) Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

2) Disuguaglianza triangolare.

(1) $|\bar{u}\cdot\bar{v}| \leq \|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|$

DIM Se $\bar{u}=\underline{0}$ o $\bar{v}=\underline{0} \Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v}=0$

$e_0 = |\bar{u}\cdot\bar{v}| \leq \|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\| = 0$

Siano ora $\bar{u}, \bar{v} \neq \underline{0}$

consideriamo il vettore

$\bar{u} + \alpha\bar{v}$

e la sua norma, anti

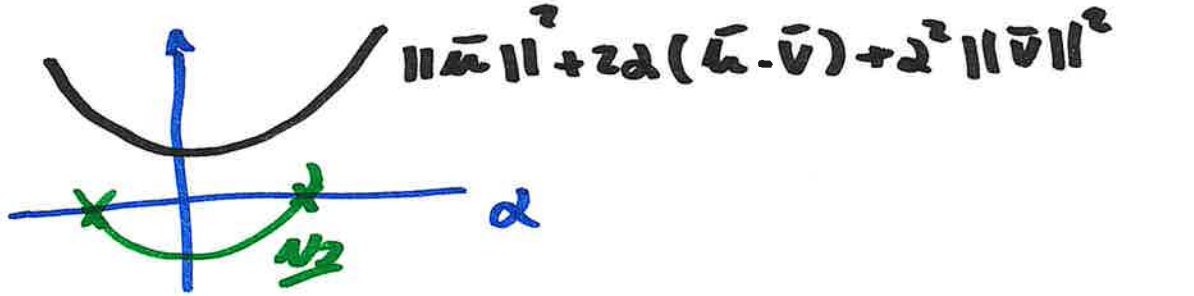
$(\bar{u}+\alpha\bar{v})\cdot(\bar{u}+\alpha\bar{v}) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

perché il prod. scalare è def. positivo.

$$(\bar{u}+\alpha\bar{v})\cdot(\bar{u}+\alpha\bar{v}) =$$

$$= \bar{u}\cdot\bar{u} + \bar{u}\cdot\alpha\bar{v} + \alpha\bar{v}\cdot\bar{u} + \alpha\bar{v}\cdot\alpha\bar{v} =$$

$$= \|\bar{u}\|^2 + 2\alpha(\bar{u}\cdot\bar{v}) + \alpha^2\|\bar{v}\|^2 \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$



$$\frac{\Delta}{4} \leq 0 \rightarrow (\bar{u}\cdot\bar{v})^2 - \|\bar{u}\|^2\cdot\|\bar{v}\|^2 \leq 0$$

$$(\bar{u}\cdot\bar{v})^2 \leq \|\bar{u}\|^2\cdot\|\bar{v}\|^2$$

$$|\bar{u}\cdot\bar{v}| \leq \|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|$$

□

(2) $\|\bar{u}+\bar{v}\| \leq \|\bar{u}\|+\|\bar{v}\|$

$$\|\bar{u}+v\|^2 = \|\bar{u}\|^2+\|\bar{v}\|^2+2(\bar{u}\cdot\bar{v}) \leq$$

$$\leq \|\bar{u}\|^2+\|\bar{v}\|^2+2|\bar{u}\cdot\bar{v}| \leq$$

$$\leq \|\bar{u}\|^2+\|\bar{v}\|^2+2\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\| =$$

$$= (\|\bar{u}\|+\|\bar{v}\|)^2$$

estraendo $\sqrt{\ }$

$$\sqrt{\|u+v\|^2} = \sqrt{(\|\bar{u}\|+\|\bar{v}\|)^2}$$

perché tutte quantità ≥ 0.

$$\Rightarrow \|\bar{u}+\bar{v}\| \leq \|\bar{u}\|+\|\bar{v}\|$$

□

Def. Siano $\bar{u}, \bar{v} \in V_n(\mathbb{R})$ due vettori: $\bar{u}, \bar{v} \neq \underline{0}$

poniamo $$\boxed{\cos(\vartheta) := \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|}}$$

ove ϑ = angolo $\widehat{uv}$ fra $\bar{u}$ e $\bar{v}$.

N.B.: per c/s. $-1 \leq \cos(\vartheta) \leq 1$

e $\cos(\vartheta) = 0 \iff \bar{u} \perp \bar{v}$

oss: In $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare

$$(u_1 \dots u_n) \cdot (v_1 \dots v_n) := \sum_i u_i v_i =$$

$$= [u_1 \dots u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

stesso conto che prodotto righe per colonne.

è un prod. scalare definito positivo

→ prodotto scalare standard.

Rispetto la base canonica ha come matrice la matrice identica.

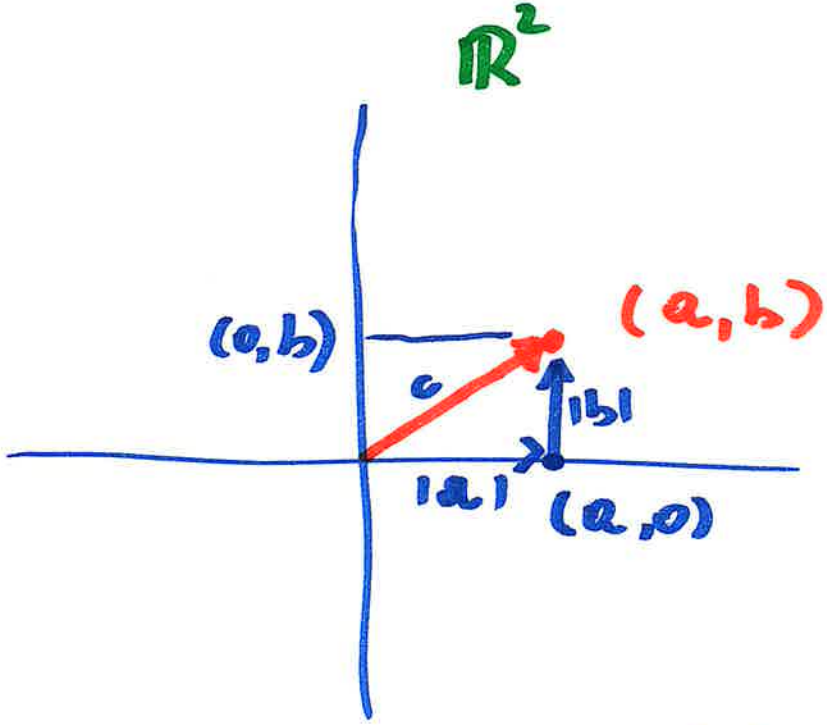
$$(u_1 \dots u_n) \cdot (u_1 \dots u_n) = \sum u_i^2 \geq 0$$

$$e \ \sum u_i^2 = 0 \iff \forall i : u_i = 0 \iff$$

$$\iff (u_1 \dots u_n) = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} {}^tR_1 \\ {}^tR_2 \\ \vdots \\ {}^tR_m \end{bmatrix} [C_1 \dots C_n] = \begin{bmatrix} R_1 \cdot C_1 \dots & R_1 \cdot C_n \\ \vdots & \vdots \\ R_m \cdot C_1 \dots & R_m \cdot C_n \end{bmatrix}$$

← come prod. scal. standard tra R_i e C_j



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

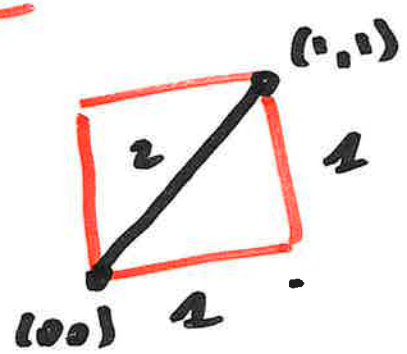
$$c = \|(a,b)\|_2 = \sqrt{(a,b)\cdot(a,b)} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ e

$$\cdot : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

un prodotto scalare non degenere.



Valgono le seguenti proprietà.

1) $X \subseteq V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow X^{\perp} \leq V_n(\mathbb{K})$

2) $X \subseteq V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$

3) $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \leq A^{\perp}$

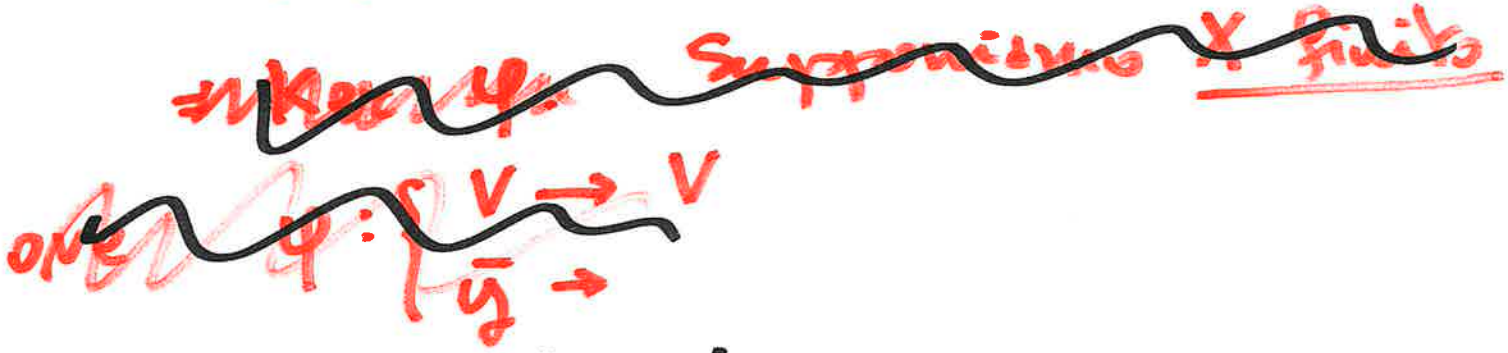
4) Se il prodotto è non degenere $\Rightarrow X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$

5) Se il prodotto è def. positivo ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow X^{\perp} \oplus \mathcal{L}(X) = V_n(\mathbb{K})$

6) $\dim X^{\perp} + \dim X^{\perp\perp} = \dim V_n(\mathbb{K})$ se il prod. i non degenere.

in gen. $\boxed{\dim X^{\perp} = n - \dim \mathcal{L}(X)}$

DIM: $X^{\perp} = \{ \bar{y} \in V_n(\mathbb{K}) : \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \ \forall \bar{x} \in X \}$



Supponiamo $|X| = t < \infty$

$\Rightarrow X^{\perp} = \operatorname{Ker} \varphi$ ove

$\varphi : V \to \mathbb{K}^t$ ed associa ad ogni $\bar{v} \in V \to (\bar{v} \cdot \bar{x}_1 \dots \bar{v} \cdot \bar{x}_t)$

$\Rightarrow$ se X è finito $\Rightarrow$ $X^\perp$ è sottospazio vettoriale.

Supponiamo adesso X un qualunque insieme

$\Rightarrow X^\perp = \mathcal{L}(X)^\perp$

Infatti se $\forall \bar{x} \in X$ si ha $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$

$\Rightarrow \forall \bar{x}' \in \mathcal{L}(X)$ si ha

$\bar{x}' = \sum a_i \bar{x}_i$ $\bar{x}_i \in X$, a_i in numero finito

$\Rightarrow \bar{x}' \cdot \bar{y} = \sum a_i \bar{x}_i \cdot \bar{y} =$

$= \sum a_i \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X)^\perp \subseteq X^\perp$

D'altro canto se $\bar{y} \in X^\perp \Rightarrow \bar{y} \cdot \bar{x} = 0 \ \forall \bar{x} \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum a_i(\bar{x}_i - \bar{y}) = 0$ $\forall a_i \neq 0$ in numero finito

$\Rightarrow \bar{x} \in \mathcal{L}(X)^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X^\perp)^\perp \supseteq X^\perp \Rightarrow \mathcal{L}(X)^\perp = X^\perp$

Se X è un insieme $\Rightarrow$
$X \subseteq V$ $\Rightarrow$ $X^\perp = \mathcal{L}(X)^\perp = \mathcal{B}^\perp$ ove

$\mathcal{B}$ è un insieme finito di gen. di $\mathcal{L}(X)$ (è visto che $V_n(\mathbb{K})$ ha dim $n < \infty$ tale insieme finito esiste).

$\Rightarrow X^\perp = \ker \varphi_{\mathcal{B}}$ e dunque $X^\perp \leq V_n(\mathbb{K})$

□

ALTERNATIVA:

$\forall \bar{u}, \bar{v} \in X^{\perp}$ mostriamo che

$\downarrow$ $\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in X^{\perp}$

$\bar{u} \cdot \bar{x} = 0 \quad \forall \bar{x} \in X$

$\bar{v} \cdot \bar{x} = 0 \quad \forall \bar{x} \in X \quad \Rightarrow (\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) \cdot \bar{x} =$

$= \alpha(\bar{u} \cdot \bar{x}) + \beta(\bar{v} \cdot \bar{x}) = 0$

$\forall \bar{x} \in X \Rightarrow \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in X^{\perp}$

Se noi sappiamo che $X^{\perp} = \ker \varphi_B$

con $\varphi_B : \begin{cases} V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^t \\ \bar{y} \longrightarrow (\bar{y} \cdot \bar{b}_1 \dots \bar{y} \cdot \bar{b}_t) \end{cases}$

e B base di $\mathcal{L}(X)$

1) $X^\perp$ è proprio uguale al ker di una applicazione lineare la cui immagine è $\dim \mathcal{L}(X)$.

$$\Rightarrow \dim X^\perp = n - \dim \mathcal{L}(X)$$

$$\Rightarrow \dim X^{\perp\perp} = n - \dim X^\perp =$$

$$= n - (n - \dim \mathcal{L}(X)) =$$

$$= \dim \mathcal{L}(X).$$

D'altro canto $X \subseteq X^{\perp\perp}$ infatti

$$\bar{x} \in X \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \ \forall \bar{y} \in X^\perp \Rightarrow x \in X^{\perp\perp}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp} \Rightarrow \mathcal{L}(X) = X^{\perp\perp}.$$

1) $X^{\perp} \leq V_n(\mathbb{K})$ ✓

2) $X \subseteq V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$ ✓

in quanto $x \in X \Rightarrow \dots x \in X^{\perp\perp}$

e $X^{\perp\perp} \leq V_n(\mathbb{K})$.

3) : $\dim X^{\perp} + \dim X^{\perp\perp} = \dim X^{\perp} + \dim \mathcal{L}(X)$

$= \dim \operatorname{Im} \varphi_B + \dim \ker \varphi_B + \dim \mathcal{L}(X)$

$= \dim \ker \varphi_B + \dim \operatorname{Im} \varphi_B =$

$= n$

4) $\dim X^{\perp\perp} = \dim \mathcal{L}(X) \; \& \; X^{\perp\perp} \supseteq \mathcal{L}(X) \Rightarrow$

$\Rightarrow X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$.

5) $\dim X^\perp + \dim \mathcal{L}(X) = n = \dim V_n(\mathbb{K})$

ma se - def. positivo $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} \in X^\perp \cap \mathcal{L}(X) \Rightarrow \bar{x}\cdot\bar{x} = 0$

ma $\bar{x}\cdot\bar{x} = 0 \Rightarrow x = \underline{0} \Rightarrow X^\perp \cap \mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}$

$\Rightarrow X \oplus \mathcal{L}(X)$

in particolare $\dim (X \oplus \mathcal{L}(X)) = n$

e dunque $X \oplus \mathcal{L}(X) = V_n(\mathbb{R})$.

oss: Si usa il fatto che X non contiene vettori isotropi se è definito positivo $\Rightarrow X^\perp \cap \mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}$.

3) Sia $A \subseteq B \Rightarrow \forall \bar{a} \in A, \bar{a} \in B \Rightarrow$ se

$\forall \bar{b} \in B: \bar{x}\cdot\bar{b} = 0 \Rightarrow \forall \bar{a} \in A: \bar{x}\cdot\bar{a} = 0 \Rightarrow$

$B^\perp \subseteq A^\perp$.

Riassunto

Se • è bilineare e simmetrico

1) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$ 3') $\mathcal{L}(X)^\perp = X^\perp$

2) $A^\perp \leq V_n(\mathbb{K})$

3) $\mathcal{L}(A) \leq A^{\perp\perp}$

Se • è non degenere ($\mathrm{Rad} = \{0\}$)

4) $\dim \mathcal{L}(A) + \dim A^\perp = n$

5) $A^{\perp\perp} = \mathcal{L}(A)$

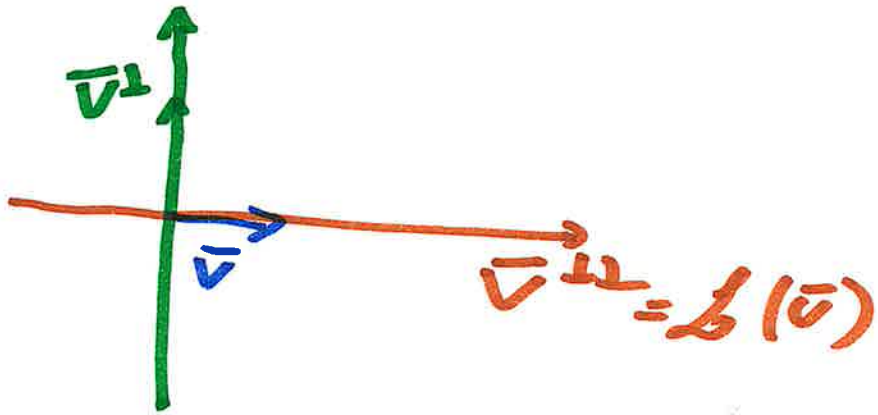
Se non ci sono in A vettori isotropi e • non deg.

6) $A^{\perp\perp} \cap A^\perp = \{0\} \Rightarrow A^{\perp\perp} \oplus A^\perp = \mathcal{L}(A) \oplus A^\perp$

7) $\mathcal{L}(A) \oplus A^{\perp} = V_n(\mathbb{K})$.

In particolare se $\cdot : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definito positivo $\Rightarrow$ Tutte le condizioni valgono $\forall\, A \leq V_n(\mathbb{R})$.

Def: Se $W \leq V_n(\mathbb{K})$ si dice complemento ortogonale di W ogni sottospazio X tale che $X \leq W^{\perp}$ e $X \oplus W = V_n(\mathbb{K})$



Def: Siano $\bar{u}$ e $\bar{v}$ due vettori di $V_n(\mathbb{K})$.

Supponiamo $\bar{u} \cdot \bar{u} \neq 0$

Si dice proiezione ortogonale di $\bar{v}$ su $\bar{u}$ il vettore

$$\bar{V}_{\parallel} := \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{u} \cdot \bar{u}} \bar{u}$$

Il coeff. $\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{u} \cdot \bar{u}}$ è detto coeff. di Fourier di $\bar{v}$ rispetto ad $\bar{u}$

Teorema: Sia $\bar{u}$ un vettore con $\bar{u} \cdot \bar{u} \neq 0 \Rightarrow$ ogni vettore $\bar{v}$ si può scrivere come

$$\bar{v} = \bar{V}_{\parallel} + \bar{V}_{\perp} \quad \text{con } \bar{V}_{\perp} \perp \bar{u}$$

DIM:

poniamo $\bar{v}_{\parallel} := \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}\bar{u}$

e $\bar{v}_{\perp} = \bar{v} - \bar{v}_{\parallel}$.

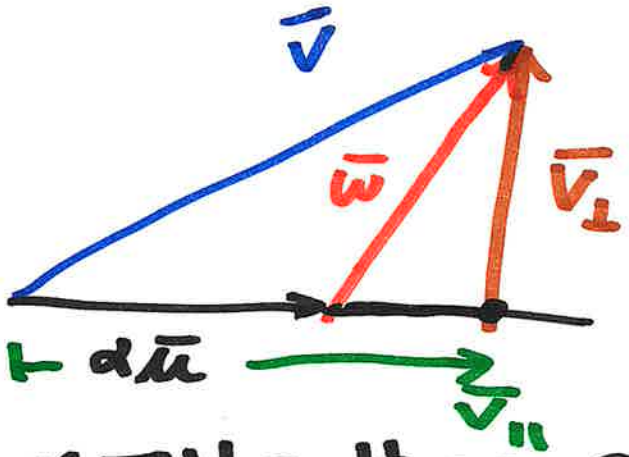
calcoliamo $\bar{v}_{\perp}\cdot\bar{u} = \bar{u}\cdot\bar{v} - \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}\bar{u}\cdot\bar{u} =$

$= 0$ □

OSS: Sia adesso $V_n(\mathbb{R})$ uno sp. vettoriale con prod. scalare Euclideo.
Sia $\bar{u} \neq \underline{0} \Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{u} \neq 0$ e sia $\bar{v}$ un qualunque vettore.

ALLORA $\bar{v}_{\perp}$ è il vettore di norma minima tale che sia possibile scrivere

$$\bar{v} = \alpha \bar{u} + \bar{w}$$



$$\bar{w} = \bar{v} - \alpha\bar{u}$$

$$\|\bar{w}\|^2 = \|\bar{v} - \alpha\bar{u}\|^2$$

$$= \|\bar{v}_\parallel + \bar{v}_\perp - \alpha\bar{u}\|^2$$

$$= \left\| \left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{\bar{u}\cdot\bar{u}} - \alpha \right)\bar{u} + \bar{v}_\perp \right\|^2$$

$$= \left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{u\cdot u} - \alpha \right)^2 \|\bar{u}\|^2 + \|v_\perp\|^2 +$$

$$2\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{\bar{u}\cdot\bar{u}} - \alpha \right)\bar{v}_\perp \cdot \bar{u}$$

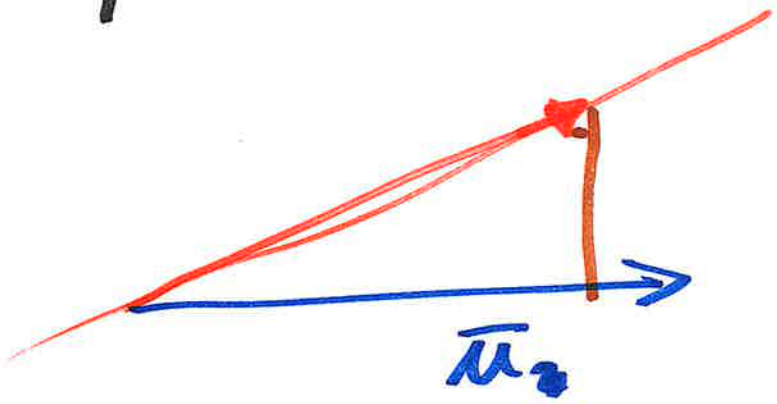
$=0$

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{u} = 0$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\bar{u} \cdot \bar{u}} - a \right)^2}_{\geq 0} \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}_1\|^2$$

questo è minimo $\Leftrightarrow \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\bar{u} \cdot \bar{u}} = a$

e dunque $\bar{v}_1 = \bar{w}$.



□